Signaux | Chapitre 1 | Correction TD (S1)

Exercice n°1 • Équation d'une OP *cours*

1)

[1] Oui, c'est une OPH qui se propage dans le sens des x croissants car $s_1(x,t) = A\cos(kx - 2\pi f t) = A\cos(k(x - ct)) = \mathrm{f}(x - ct)$ avec : $c = 2\pi f/c$.

[2] On utilise des relations trigonométriques :

$$\sin(kx)\ \sin(\omega t) = \frac{1}{2}\left(\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)\right)$$

Il s'agit d'une superposition d'une OPH+ et d'une OPH- de même pulsation et de même amplitude. On appelle cette onde une onde stationnaire (cf. MP)

[3] Non à cause du $e^{-\lambda t}$.

[4] Oui, on a bien : $s_4(x,t) = \mathrm{f}(u) = A\, e^{\omega u}\cos(\omega u)$ avec $u = t - x/c$ et $c = \omega/k$. Sens x croissants.

[5] Oui. Posons $\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix}$ le vecteur d'onde et $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le vecteur position.

Dans ce cas, $s_5(r,t) = A\sin\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}\right)$. L'onde se propage dans la direction de $\overrightarrow{k}$.

[6] Non, il s'agit d'une superposition de de OPH de pulsation quelconque. Sauf cas particulier, ce n'est pas une OPH.

[7] Oui, on utilise des relations trigonométriques :

$$s_7(x,t) = A\sin(\omega t - kx)\,(1 + 2\cos(\omega t - kx)) = A\sin(\omega u)\,(1 + 2\cos(\omega u))$$

Avec $u = t - x/c$ et $c = \omega/k$. Sens x croissants.

2)

$$s(x,t) = A\, e^{-(kx - \omega t)^2}$$

Avec : $c = \omega/k$

3)

$$s(x = 0, t) = A\cos^2(\omega t + kx)$$

Avec : $c = \omega/k$

Exercice n°2 • Lecture d'un oscillogramme *cours*

1) Lecture graphique :

n°	S_m (V)	$\langle s\rangle$ (mV)	T (µm)	f (kHz)	ω (rad·s^{-1})
1	1,00	500	380	2,63	$16,5\cdot 10^3$
2	0,68	200	380	2,63	$16,5\cdot 10^3$

2) Le signal 1 est en avance sur le signal 2 car il atteint sa valeur maximale avant.

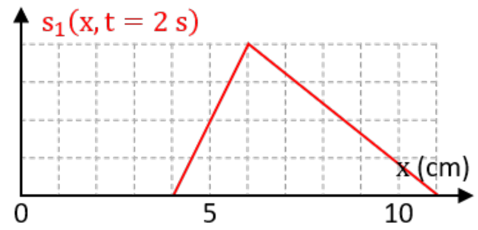
3) La différence de temps entre le maximum des deux signaux :

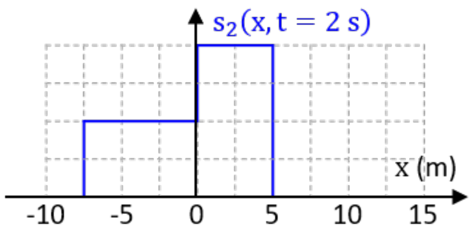
$$\Delta\tau = 100\ \text{µs} = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \quad\Rightarrow\quad \Delta\varphi = \omega\,\Delta\tau = 1,65\ \text{rad} = 95\ °$$

Remarque : le signal 1 est maximum au moment où le 2 passe par sa valeur moyenne. Cela signifie que les deux signaux sont en quadrature de phase, ce qui est cohérent avec le résultat trouvé, soit $\boxed{\Delta\varphi = 90\ °}$ (si l'on tient compte de la précision de la lecture de $\Delta\tau$).

Exercice n°3 • Représentations temporelle et spatiale d'une OP ★☆☆

1) Profil spatial des signaux à t = 2 s :

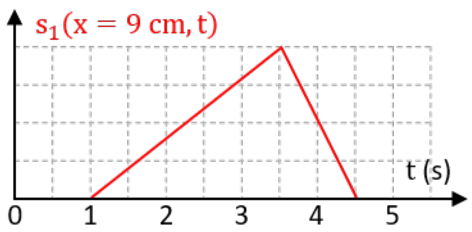


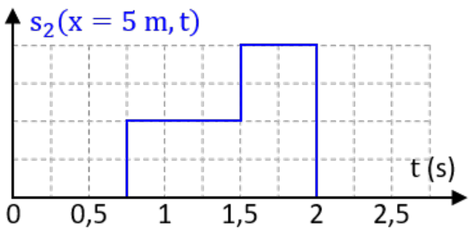


2) Temps d'arrivée du signal au niveau du capteur :

$$t_1 = \frac{d_{\text{capteur}}}{c} = \frac{2}{2} = \boxed{1\ \text{s}} \qquad t_2 = \frac{d_{\text{capteur}}}{c} = \frac{7,5}{10} = \boxed{0,75\ \text{s}}$$

3) Profil temporel des signaux au niveau des capteurs :





Exercice n°4 • Ondes acoustiques et électromagnétiques ★☆☆

1) On rappelle l'ordre de grandeur de la célérité de la lumière dans le vide $c = 3,0 \cdot 10^8$ m·s^{-1}.

Couleur	λ (nm)	$f = c/\lambda$ (Hz)	$\omega = 2\pi f$ (rad·s^{-1})
Violet	400	$7,5 \cdot 10^{14}$	$47 \cdot 10^{14}$
Rouge	750	$4,0 \cdot 10^{14}$	$25 \cdot 10^{14}$

2) On rappelle l'ordre de grandeur de la célérité du son dans l'air $c_{air} = 340$ m·s^{-1} et dans l'eau $c_{eau} = 1500$ m·s^{-1}.

Son	f (Hz)	ω (rad·s^{-1})	λ_{air}(m)	λ_{eau}(m)
Limite infrason	20	126	17	75
Limite ultrason	$20 \cdot 10^3$	$126 \cdot 10^3$	$0,017$	$0,075$

3) Il s'agit d'ondes radio. Les longueurs d'onde sont comprises entre 6 cm et 12,5 cm.

Exercice n°5 • Ondes progressives harmoniques ★★☆

1) La vitesse de phase vaut :

$$\boxed{c = \frac{2,4 \cdot 10^3 \pi}{7,0\pi} = 340 \text{ m·s}^{-1}}$$

2) L'onde a pour équation (signe « $-$ » car propagation selon les x croissants) :

$$\boxed{s_2(x,t) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - kx\right)}$$

On en déduit l'allure du signal reçu en $x = \lambda/4$.

$$s_2\left(\frac{\lambda}{4}, t\right) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{k\lambda}{4}\right) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi}{4}\right) = \boxed{s_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}$$

3) L'onde se réfléchit en $x = L$. Elle a pour expression générale :

$$s_{2r}(x,t) = s_r \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + kx + \phi\right)$$

D'après ce qu'indique l'énoncé, l'onde résultante en $x = L$ vaut :

$$s_{tot}(L,t) = s_2(L,t) + s_{2r}(L,t) = 0$$

Cette condition est satisfaite pour tout t si :

$$s_r = s_0 \quad \text{et} \quad \phi = -2kL + \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_{2r}(x,t) = -s_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + k\,(x - 2L)\right)}$$

4) L'onde a pour équation (signe « $+$ » car propagation selon les x décroissants) :

$$\boxed{s_3(x,t) = s_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)}$$

On en déduit l'allure du signal reçu en $t = T/4$.

$$s_3\left(x, \frac{T}{4}\right) = s_0 \cos\left(\frac{\omega T}{4} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \boxed{-s_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)}$$

Exercice n°6 • Retard dû à la propagation ★★☆

1) L'OPH qui se propage est de la forme :

$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega t - kx)$$

L'onde reçue en x est en phase avec l'onde émise en $x = 0$ si les deux phases diffèrent d'un multiple entier de 2π.

$$\underbrace{\omega t}_{x=0} - \underbrace{(\omega t - kx)}_{x \text{ quelconque}} = 2\pi p \quad \text{avec :} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Ainsi,

$$x = \frac{2\pi p}{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = p\lambda}$$

2) En opposition de phase, les deux signaux sont déphasés de π (modulo 2π).

$$\underbrace{\omega t}_{x=0} - \underbrace{(\omega t - kx)}_{x \text{ quelconque}} = 2\pi p + \pi \quad \text{avec :} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Ainsi,

$$x = \frac{2\pi\left(p + \frac{1}{2}\right)}{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda}$$